मॉडल पेपर

वार्षिक परीक्षा

गणित

(कक्षा 12)

■ समय : 3 घण्टे 15 मिनट ■ ■ पूर्णांक : 100 ■

निर्देश—प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

नोट— (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। (ii) प्रत्येक प्रश्न के निर्धारित अंक उसके समक्ष दिए गए हैं।

---

1. सही विकल्प चुनकर उत्तर पुस्तिका में लिखिए—

(क) यदि समुच्चय A में 5 अवयव हैं तथा समुच्चय B में 6 अवयव हैं, तो A से B में एकैकी तथा आच्छादक प्रतिचित्रणों की संख्या है

(a) 720 (b) 120

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं 1

(ख) A और B समान कोटि के आव्यूह हों तो $(AB' - BA')$

(a) विषम सममित आव्यूह है (b) शून्य आव्यूह है

(c) सममित आव्यूह है (d) तत्समक आव्यूह है 1

(ग) यदि $y = \sqrt{\sin x + y}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर है

(a) $\frac{\cos x}{2y-1}$ (b) $\frac{\cos x}{1-2y}$

(c) $\frac{\sin x}{1-2y}$ (d) $\frac{\sin x}{2y-1}$ 1

(घ) समाकलन $\int e^x \sec x\,(1+\tan x)\,dx$ बराबर है

(a) $e^x \cos x + C$ (b) $e^x \sec x + C$

(c) $e^x \sin x + C$ (d) $e^x \tan x + C$ 1

(ङ) यदि एक रेखा की द्विक् कोज्याएँ K, K, K हैं, तो 1

(a) $K > 0$ (b) $0 < K < 1$

(c) $K = 1$ (d) $K = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

2. सभी खण्ड कीजिए—

(क) सिद्ध कीजिए कि $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x, x \in [-1, 1]$ 1

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ तो A^2 ज्ञात कीजिए। 1

(ग) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 1

(घ) सदिश $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश तीन इकाई लम्बाई का सदिश ज्ञात कीजिए। 1

(ङ) यदि $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}$ तथा $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ हो, तो क्या घटनाएँ A और B स्वतंत्र है? 1

3. सभी खण्ड कीजिए—

(क) सिद्ध कीजिए कि $(x) = |x|$ द्वारा दिया गया व्यंजक न तो एकैकी है और न आच्छादक। 2

(ख) वक्र $y = 4x\,(x-1)\,(x-2)$ तथा x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निश्चित समाकलन से ज्ञात कीजिए। 2

(ग) यदि $y = x^{x^{x \cdots \infty}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए—

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{(1 - y \log x)\,x}$$ 2

(घ) यदि एकांक सदिशों $\hat{a}$ और $\hat{b}$ के बीच का कोण θ है तो सिद्ध कीजिए कि—

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\hat{a} - \hat{b}|$$ 2

4. सभी खण्ड कीजिए—

(क) अन्तराल $[0, 3]$ पर $3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25$ के उच्चतम और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए। 2

(ख) $\int \frac{x^2 \tan^{-1}(x^3)}{1+x^6}\,dx$ को हल कीजिए। 2

(ग) अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 10 - 6x - 2x^2$

(a) निरन्तर वृद्धिमान है,

(b) निरन्तर ह्रासमान है। 2

(घ) दो पाँसों को युग्मत: उछाला गया। यदि X छक्कों की प्रायिकता को व्यक्त करता है तो X की प्रत्याशा ज्ञात कीजिए। 2

5. सभी खण्ड कीजिए—

(क) सिद्ध कीजिए कि $f : R \to \{x \in R : -1 < x < 1\}$ जहाँ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}, x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी तथा आच्छादक है। 5

(ख) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -6 & 8 & 3 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ को सममित तथा विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त कीजिए। 5

(ग) K के किस मान के लिए $f(x), x = 2$ पर सतत है—

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 2 \\ k, & x = 2 \\ 3x-1, & x > 2 \end{cases}$$ 5

(घ) सिद्ध कीजिए—$\int_0^{-1} \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{2} - \log 2$ 5

(ङ) तीन बिन्दुओं A, B, C के स्थिति सदिश क्रमश: $(-4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$, $(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})$ और $(-9\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k})$ हैं। दिखाइए कि बिन्दु A, B, C संरेखीय हैं। 5

6. सभी खण्ड कीजिए–

(क) फलन $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ का x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए। 5

(ख) $y=(\cos x)^{\sin x}+x^x$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 5

(ग) अवकल समीकरण $(1+x^2)\sec^2 y\,dy+2x\tan y\,dx=0$ को हल कीजिए जबकि $y=\frac{\pi}{4}$ तथा $x=1$ 5

(घ) यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ तीन सदिश राशियाँ इस प्रकार हैं कि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$ 5

(ङ) यदि $\cos y=x\cos(a+y)$ तथा $\cos a\neq\pm1$, तो सिद्ध कीजिए कि—

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$$ 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए—

(क) $f(x)=|x|-|x+1|$ द्वारा परिभाषित फलन f के सभी असांतत्यता के बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए। 8

(ख) दिखाइए कि अवकल समीकरण $(x-y)\frac{dy}{dx}=x+2y$ समघातीय है तथा इसका हल ज्ञात कीजिए। 8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए—

(क) समीकरण निकाय $4x-5y+3z=15;\ -3x+2y+z=2;$ $x-y+2z=7$ को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 8

(ख) यदि $A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $A^3=A^{-1}$ 8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए—

(क) सिद्ध कीजिए कि एक गोले के अन्तर्गत जिसकी त्रिज्या a है, उच्चतम आयतन के बने बेलन की ऊँचाई $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ है। 8

(ख) किसी प्रश्न को तीन छात्रों A,B,C के हल करने की प्रायिकता क्रमश: $\frac{3}{10},\frac{1}{5}$ तथा $\frac{1}{10}$ हैं। तो प्रश्न के हल हो जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 8

■